KRIGAGEM COM DERIVA EXTERNA

Seja $Z(x)$ e $S(x)$ 2 variáveis regionalizadas que reflectem o mesmo fenómeno (ou fortemente relacionados) mas, muitas vezes, medidos com graus diferentes de precisão:

- A variável primária $Z(x)$ é conhecida num conjunto discreto de pontos;
- A variável secundária $S(x)$ é conhecida em todos os pontos do espaço, embora frequentemente de forma menos precisa. A esta variável secundária dá-se o nome de deriva externa.

$$E\{Z(x)\} = a + b\, S(x)$$

Exemplos:

- Profundidade do topo de uma determinada formação geológica, medida directamente em poços e indirectamente por métodos geofísicos.
- Teor em óxido de Urânio e radiometria.
- Temperatura e altitude.
- Teor de um poluente e distância (ou uma função da distância) à fonte emissora.

KRIGAGEM COM DERIVA EXTERNA

Objectivo

Melhorar a estimação de $Z(x)$ à custa dos valores de $S(x)$ conhecidos exaustivamente no domínio.

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(x_\alpha)$$

com

$$E\{Z(x_0)\} = E\left\{Z^*(x_0)\right\} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \, E\{Z(x_\alpha)\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

$$E\left\{Z^*(x_0)\right\} = a + b \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha S(x_\alpha)$$

$$E\left\{Z^*(x_0)\right\} = a + b \, S(x_0)$$

Esta última condição, atendendo a que a krigagem é um interpolador exacto, implica que:

$$S(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha S(x_\alpha)$$

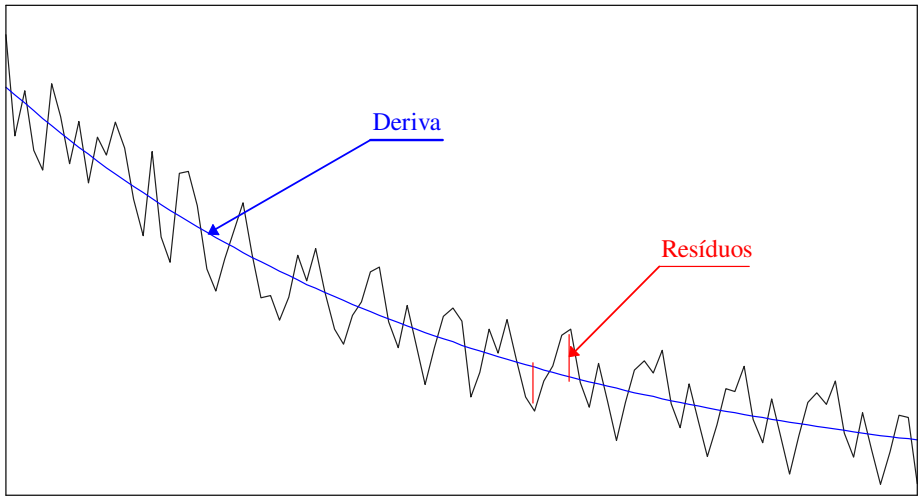
Sistema de krigagem com deriva externa

O sistema de krigagem com deriva externa, obtido por minimização da variância de estimação sujeita aos dois constrangimentos, é dado por:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta C(x_\alpha, x_\beta) - \mu_1 - \mu_2 S(x_\alpha) = C(x_\alpha, x_0) \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, n \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta = 1 \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta S(x_\beta) = S(x_0) \end{cases}$$

KRIGAGEM UNIVERSAL (KRIGAGEM COM DERIVA)

Seja



$$Z(x) = \underbrace{m(x)}_{\text{Deriva}} + \underbrace{Y(x)}_{\text{Resíduo}}$$

$$E\{Z(x)\} = m(x) \;\Rightarrow\; E\{Y(x)\} = 0$$

Hipótese

Coeficientes da deriva

$$m(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l f_l(x)$$

Monómios

em que, por definição é:

$$f_0(x) = 1$$

KRIGAGEM UNIVERSAL

Deriva quadrática

$$L = 5 \text{ (6 monómios)}$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$m(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 + a_5 x_1 x_2$$

Estacionaridade de 2ª ordem

$$L = 0$$

$$m(x) = a_0 = m = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

KRIGAGEM UNIVERSAL

Estimador linear

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(x_\alpha)$$

Estimador não enviesado

$$E\left\{Z(x_0) - Z^*(x_0)\right\} = 0$$

$$m(x_0) - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha m(x_\alpha) = 0$$

$$\sum_{l=0}^{L} a_l \left[f_l(x_0) - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha f_l(x_\alpha) \right] = 0$$

$$\boxed{a_l \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha f_l(x_\alpha) = f_l(x_0)}$$

Para $f_0(x)$ vem

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1}$$

KRIGAGEM UNIVERSAL

Variância mínima

Minimização da variância de estimação sujeita aos constrangimentos de universalidade (L+1), utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Sistema de Krigagem Universal

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta C(x_\alpha - x_\beta) - \sum_{l=0}^{L} \mu_l f_l(x_\alpha) = C(x_\alpha - x_0) \\ \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta f_l(x_\beta) = f_l(x_0) \qquad \forall l = 0,\ldots L \end{cases}$$

KRIGAGEM UNIVERSAL

Variograma teórico

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left\{\left[Z(x+\mathbf{h}) - Z(x)\right]^2\right\} = \frac{1}{2} E\left\{\left[Y(x+\mathbf{h}) - Y(x)\right]^2\right\}$$

Variograma experimental

$$Y^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha) - m^*(x_\alpha)$$

$$Y^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha) - \sum_{l=0}^{L} a_l^* f_l(x_\alpha)$$

O variograma experimental dos resíduos é dado por:

$$\gamma^*(x_\alpha - x_\beta) = \frac{1}{2} E\left\{\left[Y^*(x_\alpha) - Y^*(x_\beta)\right]^2\right\}$$

com $A = \frac{1}{2} Var\left\{m^*(x_\alpha) - m^*(x_\beta)\right\}$

$$\gamma^*(x_\alpha - x_\beta) = \gamma(x_\alpha - x_\beta) - A - B$$

e $B = Cov\left\{\left[Z(x_\alpha) - Z(x_\beta)\right], \left[m^*(x_\alpha) - m^*(x_\beta)\right]\right\}$

O variograma dos resíduos é enviesado

Estimação do variograma

- Teste de ponto fictício, atendendo a que o variograma real "está entre" o variograma *bruto* de $Z(x_\alpha)$ e o variograma dos resíduos $Y^*(x_\alpha)$.
- Utilizar o variograma modelado em áreas estacionárias do domínio.
- Utilizar o variograma modelado em direcções perpendiculares às da deriva.

Sistema de krigagem universal com derivas externas

O sistema de krigagem com E derivas externas, obtido por minimização da variância de estimação sujeita aos vários (E+L) constrangimentos, é dado por:

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta C(x_\alpha, x_\beta) - \sum_{l=0}^{L} \mu_l f_l(x_\alpha) - \sum_{i=1}^{E} \mu_i S_i(x_\alpha) = C(x_\alpha, x_0) & \\ & \forall \alpha = 1,\ldots,n \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta f_l(x_\beta) = f_l(x_0) & \forall l = 1,\ldots,L \\ \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\beta S_i(x_\beta) = S_i(x_0) & \forall i = 1,\ldots,E \end{cases}$$